

D'Alembertov dokaz osnovnog teorema algebre  
iz 1746. godine

Preveo: Ivan Jukić, 2021.

Naslov izvornika: Recherches sur le calcul intégral, Jean  
le Rond d'Alembert, 1746., izvadak

email:ivan.jukic@hi.ht.hr

Sadržaj:

- prijevod s predgovorom i komentarom
- transkript originala

## Predgovor

Genijalni ljudi imaju sposobnost da prepoznaju ono jednostavno u složenim stvarima. Tako je i sa d'Alembertom, koji je nesumnjivo bio izvrstan matematičar. Na žalost mnogi matematičari ili nisu jednako tako vješti ili nemaju volje da to svoje znanje na razumljiv način predstavljaju široj publici. To na žalost rezultira time da će biti malo onih koji će ih dobro razumjeti, ili koji će ih čak uopće razumjeti. Slično je i sa d'Alembertom, barem kad je riječ o ovom radu, koji vjerojatno zbog istovremenog bavljenja mnoštvom različitih tema, nije se previše brinuo o tome da njegov rad bude većini njegovih čitatelja razumljiv.

Kažu da mnogi matematičari u d'Alembertovo vrijeme nisu u potpunosti razumjeli njegov dokaz, tj. da su ga shvatili na različite načine. Čitajući ga iz današnje perspektive teško ga je razumjeti, pa nije čudo da je to bilo kudikamo teže u ono doba.

Tekst sam prevodio uglavnom doslovno, koliko sam umio. Izvorni sadržaj nije baš izložen na previše razumljiv način. Zato su u komentaru predstavljena objašnjenja u mjeri u kojoj sam ga shvatio (uz veliku pomoć drugih).

Prijevod svakako ima mnoštvo nedostataka, no unatoč tome se nadam da će biti barem od neke koristi onima koje ovakve teme zanimaju.

Prije samog prijevoda, bilo bi dobro navesti nekoliko stvari koje će možda pomoći lakšem razumijevanju teksta.

U to vrijeme, sredinom 18. stoljeća, nije postojao termin kompleksni broj već autor koristi izraze „veličina oblika  $p + q\sqrt{-1}$ “ ili pak „imaginarna veličina“.

Na svim crtežima apscisa i ordinata imaju položaj zakrenut za  $90^\circ$  u odnosu na uobičajeni današnji način prikazivanja.

Na svim crtežima krivulje predstavljaju samo realne vrijednosti predmetnih funkcija. Katkad se autor poziva na „imaginarne ordinate“, ali njih naravno nema na crtežima već ih moramo zamisliti.

Kroz cijeli tekst koristio sam izraze teorem i propozicija onako kako ih je i autor koristio. I u novije vrijeme ta dva izraza, u biti istoznačnice, razni autori koriste različito. Nešto što je po njihovom mišljenju važnije obično nazivaju teoremom, a ono što je od manje važnosti propozicijom.

Predmetni tekst je izvadak iz građe *Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin pour l'année 1746-1748*. Stranice

prijeвода su dodatno brojkovane i prelomljene identično kao u originalu, kako bi se lakše mogao usporediti izvorni tekst s prijevodom.

U radu se dokazuje osnovni teorem algebre da svaki polinom s realnim koeficijentima ima realno ili kompleksno rješenje. Indirektno se također pokazuje da takav polinom stupnja  $n$  mora imati  $n$  rješenja time što se dokazuje da je djeljiv sa svojim rješenjem (tj. sa izrazom oblika  $x-a$ , gdje je  $x$  varijabla a  $a$  rješenje polinoma) bez ostatka.

Ideja je slijedeća.

Uzmimo polinomnu funkciju  $y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \dots + y + C = x$  gdje je  $y$  varijabla polinoma, koeficijenti  $a, b, \dots$  realni brojevi, a  $C$  realna konstanta.

Ovdje je zamijenjeno mjesto varijable  $x$  i  $y$  radi toga što autor tako čini na početku jer će tražiti inverznu funkciju, tj.  $y(x)$  odnosno njenu modifikaciju  $y(z)$ . (Autor počinje tvrdnjom koja uključuje bilo kakvu funkciju\*<sup>1</sup> no mi ćemo se radi prikaza ideje ograničiti na polinomnu funkciju.)

Izjednačimo polinom s nulom:  $y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \dots + y + C = 0$  i dalje  $y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \dots + y = -C$ . Treba pokazati da se za svako proizvoljno ali realno  $C$  može naći neki realni ili kompleksni  $y$ , koji će kad se uvrsti u lijevu stranu jednadžbe potvrditi jednakost, što je ekvivalentno tvrdnji da svaki polinom ima neko realno ili kompleksno rješenje.

Mijenjanjem konstante  $C$  ne mijenja se „oblik“ funkcije predstavljene navedenim polinomom, već se ona samo translatira uzduž  $x$  osi. Zamijenimo konstantu  $-C$  sa  $z$  i time ju učinimo realnom varijablom. Pošto se dakle može mijenjati  $z$  po želji (u rasponu realnih vrijednosti) onda za  $z$  možemo staviti i da je  $0$ . Tada funkcija očigledno ima rješenje i ono je  $0$ , tj.  $y(z)=0$  kad je  $z=0$ . Izraz  $y(z)$  predstavlja neku funkciju. Ona će se razviti u red po  $z$  oko točke  $0$ . Pošto je takav red, po autoru, „jako“ konvergentan, moći se zanemariti svi članovi osim prvog realnog i prvog kompleksnog. Time će se pokazati da se pomoću takvog reda za svaki „beskonačno“ mali  $z$  može dobiti neki realni ili kompleksni  $y$ . Pokazat će se dalje da to što vrijedi za „beskonačno“ mali  $z$  vrijedi i za konačno mali  $z$ . Napraviti će se još jedno proširenje i kazati će se da ono što vrijedi za neki konačan  $z$ , vrijedi i za koliko god veliki  $z$ . Time će se, prema autoru, konačno dokazati polazna tvrdnja.

Dokazivanje se izvodi u 4 koraka:

1. svaka funkcija\*<sup>1</sup> se može razviti oko nule u red koji je konvergentan, to se uzima kao gotova stvar te se samo pokazuje do čega to dovodi u ovom slučaju, čl.2. i 3.
2. ono što vrijedi za beskonačno malo vrijedi i za konačno malo, čl.4.
3. ono što vrijedi za konačno malo vrijedi i za ma kako konačno veliko, čl.5. i 6.
4. polinom je djeljiv sa svojim rješenjima, čl.7, 8, i 9.

---

\*1 U kasnijim radovima autor se ograničio na algebarsku funkciju

ISTRAŽIVANJA  
INTEGRALNOG RAČUNA  
g. D'ALEMBERTA  
PRVI DIO  
INTEGRIRANJE RACIONALNIH RAZLOMAKA

Da bismo mogli racionalni diferencijalni razlomak općenito reducirati na kvadratni oblik hiperbole ili kruga, prema metodi *M. Bernoullija*\* može se pokazati da se svaki racionalni polinom koji nije razlomljen i koji se sastoji od varijable  $x$  i konstanti, uvijek može rastaviti, kad je parnog stupnja, u trinomne faktore  $xx + fx + g$ ,  $xx + hx + i$  čiji su svi koeficijenti  $f, g, h, i$ , itd. realni. Vidljivo da postoji poteškoća samo kod polinoma koji nisu djeljivi sa nekim realnim binomom,  $x+a$ ,  $x+b$  itd. zbog toga što inače možemo uvijek učiniti da ona nestane dijeljenjem sa realnim binomima, i lako vidimo da produkt tih binoma daje realne faktore  $xx + fx + g$ .

*G. Cottes, Moivre, Herman* itd. i nekoliko drugih su riješili navedenu poteškoću samo za polinome  $x^{2m} + Ax^m + B$  sastavljene od samo tri člana.  
*G. Smith*

\* Vidi mem. l'Acad de Paris. god.1702.

u komentaru na kraju *l'Harmonia mensurarum*, dolazi također do rješenja samo za polinome četvrtog stupnja, te izvodi svoj prikaz redukcije promatranog polinoma kao jednadžbu 4-tog stupnja, kad je njen zadnji član negativan.

Nitko koliko znam nije otišao dalje, ako izuzmemo g. *Eulera*, čiji se rad spominje u svesku VII. *Miscellanea Berolinensia*, u kojem je općenito prikazao predmetni teorem. No čini mi se da g. *Euler* još ništa od svojih radova nije izdao na tu temu. Barem ja nisam ništa našao u postojećim radovima tog slavnog autora. Tako sam mislio da bih ovdje mogao izložiti u nekoliko riječi svoja istraživanja ove materije, posebno što će mi to dati mogućnost da pokažem način rješavanja više propozicija, loše dokazanih u gotovo svim knjigama iz algebre.

**II. Propozicija I.** (sl.1.2.3.) *Neka je TM neka proizvoljna krivulja sa koordinatama TP = z, PM = y, i gdje je y = 0 ili y = ∞ kad je z = 0. Ako uzmemo da je z pozitivno ili negativno, ali beskonačno malo, vrijednost y u odnosu prema z može uvijek biti izražena kao realna veličina kad je z pozitivno: a kad je z negativno, kao realna veličina, ili kao veličina  $p + q\sqrt{-1}$ , pri čemu su p & q i jedan i drugi realni.*

Zbog toga što je z beskonačno malo, možemo izraziti vrijednost y prema z pomoću ovog jako konvergentnog reda  $y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}} + \text{itd.}$  u kojem je zamišljeno da eksponenti od z rastu, i gdje uvijek možemo pretpostaviti da su svi članovi realni brojevi uz pozitivno z, i zato jer krivulja prolazi kroz točku T ili ima asimptotu u toj točki, (byp.), slijedi da možemo

uvijek pretpostaviti da pozitivni padaju na stranu P ili da imaju realne ordinate. 1°. Ako svi članovi reda ostanu pozitivni kad se  $z$  učini negativnim, vrijednost  $y$ , koja odgovara pozitivnom ili negativnom  $z$ ,

može biti jednostavno izražena pomoću  $y = az^{\frac{m}{n}}$ , zanemarujući sve druge članove koji su nule u odnosu na drugo, i u tom slučaju odgovarat će  $y$ -u kao realnoj vrijednosti, i kad je  $z$  negativan i kad je  $z$  pozitivan.

2°. Ako  $z^{\frac{m}{n}}$  postane imaginarno pri negativnom  $z$ , što će se dogoditi ako je  $n$  paran i  $m$  neparan broj, tada ordinata koja odgovara pozitivnom ili negativnom  $z$  još uvijek može biti izražena kao  $az^{\frac{m}{n}}$ , koja će biti realna kad je  $z$  pozitivan, i koja pri negativnom  $z$  prelazi

$$\text{u } a^{\frac{2k}{2k}} \sqrt{-z^m} = az^{\frac{m}{2k}} \cdot \sqrt[2k]{-1} = a \left( z^{\frac{m}{2k}} \sqrt{-1} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Sada geometričari\* znaju da se svaka veličina  $(B\sqrt{-1})^h$  može uvijek svesti na oblik  $p + q\sqrt{-1}$ , gdje su  $p$  &  $q$  realni. Dakle imaginarna ordinata koja odgovara negativnom  $z$  može se u ovom slučaju izraziti kao  $p + q\sqrt{-1}$ .

3°. Ako neki od članova reda ostanu realni kad  $z$  postane negativno, a drugi postanu imaginarni, uzet ćemo  $y = az^{\frac{m}{n}} + cz^{\frac{t}{u}}$ , gdje  $az^{\frac{m}{n}}$  predstavlja sve članove koji ostaju realni, a  $cz^{\frac{t}{u}}$  koji postanu imaginarni, kad učinimo  $z$  negativnim. Vrijednost  $cz^{\frac{t}{u}}$ , kad je  $z$  negativno, može se postaviti da je  $= e + f\sqrt{-1}$ , (točka 2. prethodno),

\*Vidi dio 2. dolje

gdje su  $e$  i  $f$  realni brojevi. Dakle kad je  $z$  negativan, imamo  $y = az^{\frac{m}{n}} + e + f\sqrt{-1}$ , t.j.  $p + q\sqrt{-1}$ . Kraj dokaza.

(Da ne bi ostale nedoumice kod prikaza ovog dokaza, primjetit ćemo 1°. Da je vrijednost  $y$  od  $z$ , kad je  $z$  beskonačno malo, jedan beskonačno konvergentan niz, čiji članovi počinju, barem od određene udaljenosti od prvog člana, sadržavati samo pozitivne potencije od  $z$ , i stoga su beskonačno mali.

2°. Da, kad u jednadžbi krivulje za  $y$  uvrstimo njenu vrijednost ( u obliku razvoja u red –op.prev.) koja korespondira  $z$ , što više članova takav  $y$  bude imao, to će biti sve više visokih potencija od  $z$  u članovima koji će ostati, nakon što se obrišu oni članovi koji su se poništili, i stoga će se rezultat supstitucije približavati sve više prema nuli što uzimamo više članova u jednadžbi za  $y$ .

3°. Da će biti isto, ako čineći  $z$  negativnim u jednadžbi krivulje, uvrstimo odgovarajuću vrijednost za  $y$  koja korespondira negativnom  $z$ , zbog toga, što god više članova takav  $y$  bude imao, to će biti sve više članova visokih potencija od  $-z$  nakon supstitucije. Sada, ako tražimo veličinu  $A + B\sqrt{-1} = (-z)^{\frac{n}{2m}}$ , lako ćemo je pronaći, i dokazat ćemo dolje nakon čl.2.

da su  $A$  i  $B$  realne veličine reda  $z^{\frac{n}{2m}}$ . Tako ako zamijenimo preostale članove, i umjesto potencija od  $-z$ , stavimo vrijednosti  $A + B\sqrt{-1}$ , i razdijelimo rezultat u dvije odvojene veličine, jednu posve realnu, a drugu pomnoženu sa  $\sqrt{-1}$ , svaka od tih veličina će biti čak još manja, i to više će se približavati nuli, što više članova uzimamo za vrijednost od  $y$ . Tako da beskonačni red predstavlja vrijednost od  $y$  za  $-z$ , iako imaginarnu prema pravoj vrijednosti od  $y$ ;

*\*Memoires de l'Academie Svezak.II.*

i vidljivo je da kad  $-z$  postaje beskonačno malo, ne samo da možemo zanemariti sve realne članove reda osim jednog, nego možemo zanemariti i sve imaginarne članove osim jednog.

Zato što je  $(-z)^{\frac{n}{2m}} = A + B\sqrt{-1}$  i  $(-z)^{\frac{n+p}{2m}} = a + b\sqrt{-1}$ ,  $a$  će biti beskonačno malo prema  $A$ , i  $b$  prema  $B$ . I tako dalje.

Štoviše, veoma je važno uočiti u slučaju ovog prikaza, da kad je  $z$  beskonačno malo, nije uvijek dozvoljeno pretpostaviti da je  $y$  jednak samo jednoj potenciji od  $z$  za određivanje oblika krivulje kod njenog ishodišta.

Kao na primjer krivulja čija jednačba je  $y = z^2 + \sqrt{z^5}$ ; ta krivulja mora kod svog ishodišta imati oblik prikazan na sl.3, to jest ona mora imati dvije konveksne grane na istoj strani koordinatne osi, bez bilo kojih drugih realnih grana; umjesto toga ako uzmemo samo  $y = z^2$  za njenu jednačbu kod ishodišta, možemo vidjeti da slični na običnu parabolu. Nekad je potrebno izraziti vrijednost  $y$  sa tri člana: na primjer neka je  $y = bz + z^2 \pm \sqrt{z^5}$ , krivulja koja kod svog ishodišta ima oblik prikazan na sl.5, umjesto toga ako zanemarimo član  $z^2$ , vidjet ćemo da ona ima kod svog ishodišta oblik kao na sl.6.)

**III. Korolar I. (sl.4.)** Ako razmotrimo krivulju (na sl.4. u odnosu na onu sa sl.1. –op.prev.) prema koordinatama  $AC$ ,  $CT$ , ja kažem da se imaginarna ordinata, koja odgovara apscisi  $AQ$  beskonačno malo većoj od  $AC$ , može pretpostaviti da je  $= p + q\sqrt{-1}$ . Zbog translacije osi  $TP$  u  $AC$ , samo se za neku realnu konstantu iznosa  $CT$  povećava vrijednost svih ordinata  $PM$  krivulje, bilo realnih ili imaginarnih.

Za imaginarne ordinate, koje odgovaraju TP (koje je negativno i beskonačno malo), može se pretpostaviti da su  $= p + q\sqrt{-1}$  (čl.2.). Imaginarne ordinate koje odgovaraju AQ su  $= CT + p + q\sqrt{-1}$ . I tako dalje.

IV. Korolar II.(sl.4.) Ako povećamo apscisu AC za konačnu veličinu CQ, barem do određenog iznosa, odgovarajuća ordinata može se pretpostaviti kao  $= p + q\sqrt{-1}$ . Jer ako nema konačne veličine za CQ, takve da  $p + q\sqrt{-1}$  može predstavljati odgovarajuću ordinatu, onda ova ordinata, niti kad je CQ beskonačno malo, ne može biti izražena sa  $p + q\sqrt{-1}$ . Što je suprotno prethodnom korolaru. Štoviše vidljivo je iz primjedbi kojima završava članak 2. da ako vrijednost  $y$  od  $z$  beskonačno konvergira kad je  $z$  beskonačno malo, možemo pretpostaviti da kad  $z$  ima konačnu vrijednost, da je odgovarajuća vrijednost  $y$  također izražena pomoću jako konvergirajućeg reda; i ako zamislimo da je taj cijeli red sastavljen od beskonačno mnogo članova koji su supstitucija jednadžbe krivulje na mjestu  $y$ , rezultat supstitucije će biti beskonačno mali ili nula, t.j. i u slučaju pozitivnog i u slučaju negativnog  $z$ . U slučaju negativnog  $z$ , red koji izražava vrijednost od  $y$  je sačinjen od članova svaki koji je  $A + B\sqrt{-1}$ , gdje A i B označavaju realne veličine. Stoga se cijeli red može pretpostaviti kao  $= p + q\sqrt{-1}$ . Tako postoji konačna vrijednost  $-z$ , kojoj odgovara vrijednost  $y$  jednaka  $p + q\sqrt{-1}$ .

V. Korolar III. Kažem da za koju god konačnu veličinu CQ povećamo apscisu AC, možemo uvijek pretpostaviti da je odgovarajuća imaginarna ordinata jednaka  $p + q\sqrt{-1}$ . Jer pretpostavimo na trenutak da to ne možemo,

onda mora postojati CO ili  $\alpha$  kao najveća vrijednost od CQ, koja daje odgovarajuću ordinatu  $= p + q\sqrt{-1}$ , t.j. da je  $\alpha$  ili CO najveća vrijednost od CQ koja daje realne  $p$  &  $q$ , očito je (čl.2.3.4.) da se povećavanjem  $\alpha$  za beskonačno mali iznos, može pretpostaviti odgovarajuća vrijednost  $p$  kao  $t + i\sqrt{-1}$ , i  $q$  kao  $q = b + \delta\sqrt{-1}$ , gdje su  $t, i, b, \delta$ , realne. Pošto se realne vrijednosti  $p$  i  $q$  u  $\alpha$ , i općenito  $p$  i  $q$  u CQ, mogu izraziti pomoću dvije jednadžbe, možemo pretpostaviti da su to jednadžbe dviju krivulja, koje imaju kao zajedničku apscisu CQ, i za ordinate  $p$  i  $q$ , (dobit ćemo te jednadžbe prvo supstituiranjem  $p + q\sqrt{-1}$  umjesto  $y$  u jednadžbi krivulje, zatim izjednačavanjem s nulom posebno svih njenih realnih dijelova a posebno dijelova koji sadržavaju  $\sqrt{-1}$ . Nakon što ovu posljednju podijelimo sa  $\sqrt{-1}$ , imat ćemo dvije jednadžbe gdje će biti pomiješane veličine CQ,  $p, q$ , čak njihove razlike, što će se dogoditi kad krivulja TM nije geometrijska, te možemo, pomoću poznatih metoda, promijeniti te dvije jednadžbe u druge dvije, tako da jedna sadrži CQ i  $p$ , a druga CQ i  $q$  i više njihovih razlika, ako je potrebno.)

Tako se, s povećavanjem  $\alpha$  za beskonačno mali iznos, i slijedom toga također (čl.4.) i za konačan iznos, može odgovarajuća ordinata predstaviti kao  $t + i\sqrt{-1} + (\beta + \delta\sqrt{-1})\sqrt{-1} = t - \delta + (i + \beta)\sqrt{-1}$ , t.j. što se može predstaviti veličinom  $e + f\sqrt{-1}$  u kojoj su  $e$  i  $f$  realni.

Stoga  $\alpha$  nije najmanja vrijednost (valjda najveća –op.prev.) CQ koja daje odgovarajuću ordinatu  $= p + q\sqrt{-1}$ ; što je suprotno hipotezi. I tako dalje.

**VI. Propozicija II.** Neka je polinom  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx + g$ , takav da nema realne veličine koja kad se uvrsti na mjesto  $x$ , učini da iščeznu svi članovi od  $y$ ; ja kažem da će onda uvijek postojati veličina  $p + q\sqrt{-1}$ , koja će, kad se uvrsti na mjesto  $x$ , učiniti da taj polinom bude jednak nuli.

Jer 1°. Možemo uvijek zamijeniti zadnji član  $g$ , bez da diramo druge, takvim članom, koji će, kad se u  $y$  umjesto  $x$  stavi neka realna vrijednost, učiniti da svi članovi iščeznu: zaista, stavimo u polinomu, umjesto  $x$ , realnu veličinu  $h$ , i neka je  $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} + \dots + fh = A$ , očito je da će se zamjenom  $h$  umjesto  $x$  u  $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx - A$  sve poništiti; no ovaj polinom se razlikuje od prvotnog samo u zadnjem članu.

2°. (sl.7.) Povucimo liniju  $BAD$  sa točkom  $A$  koja je dijeli na  $AB$  i  $AD$  koji predstavljaju  $-A$  i  $g$  te zamislimo da u točki  $B$  podignemo okomito liniju  $BO$  koja predstavlja realnu vrijednost  $h$ , te da u svim točkama  $A, C, D$ , itd. podignemo linije, realne ili imaginarne, koje predstavljaju realne ili imaginarne veličine koje kad se uvrste umjesto  $x$  uzrokuju da svi članovi polinoma iščeznu, dajući sukcesivno kod svog zadnjeg člana sve moguće vrijednosti od  $-AB$  ili  $-A$  do  $AC$  ili  $g$ ; očito je da će krajevi  $O, Q, T$ , itd. realnih ordinata biti na jednoj krivulji  $OQTS$ , i da se imaginarna ordinata koja odgovara  $AD$  može uvijek pretpostaviti kao jednaka  $p + q\sqrt{-1}$  (čl.5.). I tako dalje. Kraj dokaza.

**VII.** Korolar I. Tako pretpostavljeni polinom se može podijeliti sa  $x - p - q\sqrt{-1}$ . Pošto je dijeljenjem polinoma uvijek moguće doći do ostatka  $r$  u kojem više nema  $x$ , te ako  $Q$  nazovemo kvocijentom, očito je da će  $(x - p - q\sqrt{-1}) \times Q + r$  biti jednako i identično pretpostavljenom polinomu. Stoga uvrštavanjem veličine  $p + q\sqrt{-1}$  za  $x$ , rezultat mora biti jednak nuli. Dakle onda je  $r = 0$ . Dakle dijeljenje je bez ostatka.

**VIII.** Korolar II. Isti polinom se može također podijeliti i sa  $x - p + q\sqrt{-1}$ . Teškoća se može riješiti ako se pokaže da će zamjena  $p + q\sqrt{-1}$  ili  $p - q\sqrt{-1}$  na mjesto  $x$  jednako uzrokovati da svi članovi polinoma iščeznu. Da to pokažem, primjećujem da zamjenom  $p + q\sqrt{-1}$  umjesto  $x$ , i izjednačavanjem rezultata s nulom, dobivamo dvije jednačbe, od kojih je jedna sačinjena samo od realnih članova, a druga od članova koji sadržavaju  $q\sqrt{-1}$ ; tako da u dijelu koji je sačinjen samo od realnih članova imamo samo parne potencije od  $q$ ; dok u dijelu sačinjenom od imaginarnih članova imamo samo neparne potencije od  $q$  te ovaj dio ili jednačba ima  $q\sqrt{-1}$  kod svih svojih članova. Stoga dijeljenjem druge jednačbe sa  $q\sqrt{-1}$  i ona će imati samo parne potencije od  $q$  kao i prva. Tako niti jedna od jednačbi neće trpjeti nikakve promjene ako zamijenimo  $-q$  sa  $q$ . Dakle ako  $p + q\sqrt{-1}$ , stavljen umjesto  $x$ , učini da iščeznu svi članovi polinoma, isto će biti i za  $p - q\sqrt{-1}$ .

**IX.** Propozicija III. Na osnovu istih pretpostavki kao u čl.6. ja kažem da polinom može uvijek biti rastavljen na faktore

$xx + hx + i$ ,  $xx + lx + m$ , itd. čiji koeficijenti su realni.

Pošto ti polinomi mogu biti podijeljeni sa  $x - p - q\sqrt{-1}$  i  $x - p + q\sqrt{-1}$  (čl. 7. i 8.) oni također mogu biti podijeljeni sa  $xx - 2px + pp + qq$  gdje je svaki faktor realan; ; te se dobije kvocijent, što je rezultat istog umovanja učinjenog u čl. 6. 7. i 8. za polinom, za koji dokazujemo da se isto tako može podijeliti realnim trinomnim faktorom, i tako dalje. Kraj dokaza.

#### N A P O M E N A PRVA

**X.** Treba uočiti da u prethodnim dokazivanjima nismo pretpostavljali da je imaginarni korijen polinoma imao, ili da bi mogao imati neki imaginarni izraz, prije nego što je reduciran na  $p + q\sqrt{-1}$ ; te su naša dokazivanja time samo još općenitija. No mi uvijek možemo dobiti realne veličine  $p$  i  $q$  barem pomoću geometrijske konstrukcije, jer imamo dvije jednadžbe koje sadržavaju  $p$  i  $q$ .

Uz to, bez brige ima li polinom imaginarne korijene, možemo ga podijeliti sa  $xx + hx + i$ , i pretpostavljajući da je ostatak od dijeljenja jednak nuli, imat ćemo dvije jednadžbe sa  $h$  i sa  $i$ , koje će uvijek imati barem nekoliko realnih korijena.

#### N A P O M E N A DRUGA

**XI.** Ako imamo kakav god imaginarni izraz, za korijen polinoma, ili općenito za bilo koju veličinu, možemo uvijek naći veličinu  $p + q\sqrt{-1}$  kojoj je ovaj izraz

jednak, te dodijeliti vrijednosti za  $p$  i  $q$ , kao kod dijeljenja luka kružnice na jednake dijelove, kod običnog dijeljenja i kod logaritmiranja i kvadrature kruga, kad se susrećemo sa izrazima koji imaju imaginarne eksponente. Ja sam dokazao ovu propoziciju u članku 78. moje Disertacije o vjetrovima, što mi je to bilo potrebno za rješenje jednog problema; pokazao sam

1°. da  $\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$ , gdje su  $A$  &  $B$  realni, što je očito jer

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1}) \times (g - h\sqrt{-1})}{(g + h\sqrt{-1}) \times (g - h\sqrt{-1})} = \frac{ag + bh}{aa + hh} + \frac{bg - ah}{aa + hh} \sqrt{-1}$$

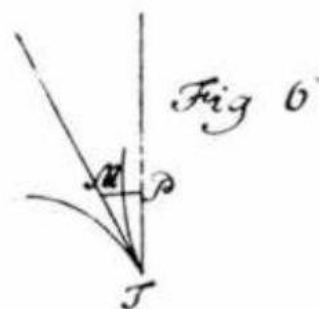
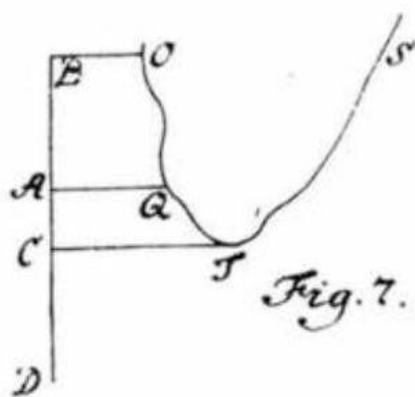
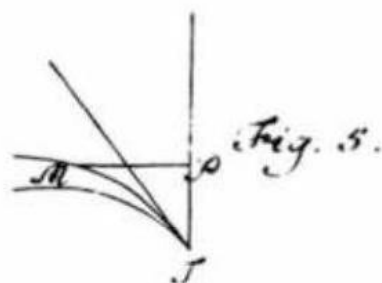
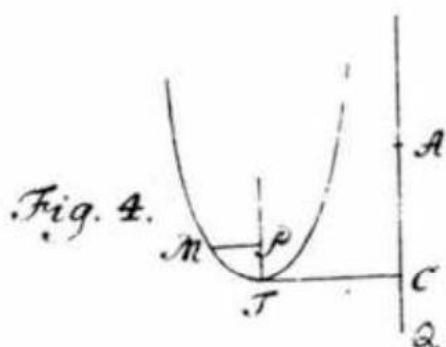
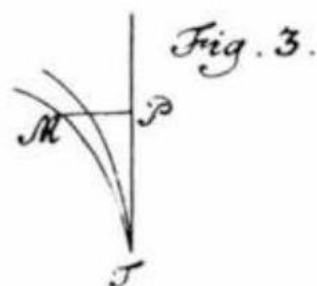
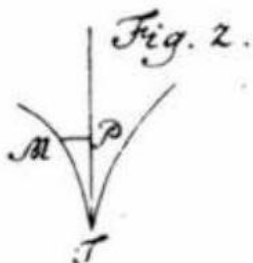
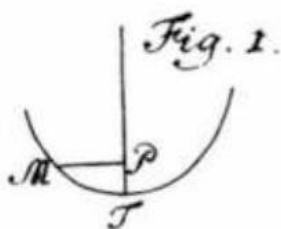
2°. da  $(a + b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$  je  $= A + B\sqrt{-1}$ , gdje su  $B$  i  $A$  sinus i kosinus kuta

čiji radijus je  $\sqrt{(aa + bb)g} \times e^{-h \int \frac{adb - bda}{2(aa + bb)}}$  i čija vrijednost  $h$  je

$$\text{Log} \cdot \sqrt{(aa + bb)} + g \int \frac{adb - bda}{aa + bb};$$

gdje ćemo primjetiti da je  $\int \frac{adb - bda}{aa + bb}$  kut čiji je tangens  $\frac{b}{a}$ .

3°. Pomoću te dvije propozicije jednostavno je svesti bilo koju imaginarnu veličinu na  $A + B\sqrt{-1}$ , sukcesivno čineći da iščeznu svi imaginarni izrazi koje sadrži, osim jednog; koji mora isto iščezavati ako pretpostavljeni izraz, koji sadrži imaginarnu, međutim označava realnu veličinu; kao u slučaju nesvodive jednadžbe trećeg stupnja.



Napomene prevodioca

Riječi apscisa i ordinata koristim isto kao i autor da ne pravim dodatnu zbrku, dakle apscisi i ordinati su zamijenjena mjesta u odnosu na današnju uobičajenu terminologiju.

uz članak II.

Današnjom terminologijom rečeno, pretpostavlja se neka funkcija  $F(y,z)$  gdje je  $z$  realna varijabla, a  $y$  može biti kompleksna. Pod „krivuljom“ takve funkcije autor podrazumijeva samo onu krivulju koja se može nacrtati za realne vrijednosti  $y$ . U ovoj propoziciji autor tvrdi da će dokaz vrijediti za svaku funkciju\*<sup>2</sup>.

Tvrdi se da uz  $F(y,z) = 0$ , ako je  $y = 0$  rješenje kad je  $z = 0$ , onda postoji realno ili kompleksno rješenje  $y$  i za svako dovoljno malo realno  $z$ . (Tvrdi da to isto vrijedi i za pretpostavku  $y = \infty$  za  $z = 0$ , ali to nije ovdje pokazao).

Dokaz se temelji na razvoju  $F(y,z)$  u red  $y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}} + \dots$ , koji je moguć kad je  $z$  dovoljno malo. Potencije članova ovog „jako konvergirajućeg“ reda su rastuće.

1°. Ako su članovi reda svi pozitivni i realni za  $z$  pozitivno ili negativno onda se svi članovi reda, osim prvog, mogu zanemariti, te tada postoji

rješenje i ono je  $y = az^{\frac{m}{n}}$ .

2°. Ako su članovi reda svi kompleksni za  $z$  negativno (što će nastupiti kad su u potencijama brojnici neparni a nazivnici parni) onda se svi članovi reda, osim prvog, mogu zanemariti, te i tada postoji rješenje i ono je (uz

$n=2k$ )  $y = a(-z)^{\frac{m}{2k}} = az^{\frac{m}{2k}}(-1)^{\frac{m}{2k}} = az^{\frac{m}{2k}}\sqrt{-1}$ , t.j. to je neki kompleksni broj oblika  $p + q\sqrt{-1}$ .

3°. Ako su za negativno  $z$ , neki članovi reda realni a neki kompleksni onda se i tada mogu zanemariti svi realni članovi osim jednog i svi kompleksni

članovi osim jednog te ako je realni član predstavljen sa  $a(-z)^{\frac{m}{n}}$  a

kompleksni sa  $c(-z)^{\frac{t}{u}}$  onda se ovaj prvi može pisati kao realni  $p_1$ , a drugi

kao kompleksni  $p_2 + q\sqrt{-1}$  (kao u točki 2°), tj. zajedno kao  $p + q\sqrt{-1}$ , tj. i tada postoji rješenje.

Ovdje autor bez dokaza podrazumijeva da je uvijek moguć razvoj u red (što mu je predbacio Euler).

uz članak III.

Razmišljanje je otprilike slijedeće. Kako god izgledala funkcija njen „oblik“ se neće mijenjati ako joj mijenjamo zadnji član koji predstavlja konstantu, bio on nula ili bilo koji realan broj, tj. svi koeficijenti i potencije do uključivo predzadnjeg člana mijenjaju oblik funkcije, a zadnji član ne utječe na oblik već samo translata tu funkciju po jednoj osi.

---

\*2 U kasnijim radovima autor se ograničio na algebarsku funkciju

Tako ako vrijedi umovanje iz čl.2. za bilo koju funkciju čiji je zadnji član, tj. konstanta jednaka nuli vrijedit će i za sve one njene translacije kad je konstanta različita od nule, jer funkciju možemo uvijek takvim translacijom dovesti u položaj da je konstanta jednaka nuli i tada možemo primijeniti razvoj u red.

Grafički je to predstavljeno na sl.4. kao translacija krivulje „lijevo-desno“ (po  $z$  osi).

uz članak IV.

Tvrđi se da ako vrijedi da postoji kompleksno rješenje kad  $z$  povećamo za beskonačno malu vrijednost, onda vrijedi isto to i za neku konačnu vrijednost, jer ako ne vrijedi za konačno malo ne vrijedi ni za beskonačno malo. Također dokaz se dodatno potkrepljuje tvrdnjom da će razvoj u red funkcionirati ne samo kad je  $z$  beskonačno malo nego i kad ima i neku, premda malu, konačnu vrijednost.

uz članak V.

Tvrđnja iz članka 4. se dalje proširuje pa se kaže da postoji kompleksno rješenje za  $i$  za slučaj kad  $z$  povećamo za bilo koju konačnu vrijednost, tj. da za bilo koju realnu vrijednost  $z$  postoji neko kompleksno rješenje predmetne funkcije.

Dokaz se izvodi tako da je postavljena suprotna tvrdnja, tj. da se  $z$  ne može povećati za bilo koju vrijednost, a da pri tome funkcija ima rješenje. Ako ne može, onda znači da postoji neki najveći  $z$  poslije kojeg funkcija više nema nikakvih rješenja. Međutim uvrštavanjem u jednadžbu tog najvećeg  $z$  i jednog beskonačno malog dodatka, u općem obliku, dobiva se opet nešto što se može svesti na oblik  $p + q\sqrt{-1}$ , tj. time se pokazuje se da nema takvog najvećeg  $z$ .

(Ovome je prigovorio Gauss time što kaže da se može dogoditi da, premda smo dodali koliko god beskonačno malih dodataka,  $z$  ipak ne premaši neku konačnu vrijednost.)

uz članak VI.

U predstavljenim polinomima  $f$  predstavlja običnu konstantu (da ne bude zabune).

Ovdje se primjenju raniji dokazi na polinom. Rečeni  $z$  može se prometnuti u zadnji član bilo kojeg cijelog polinoma sa realnim koeficijentima.

Tvrđi se da, ako za zadnji član polinoma stavimo  $g$  takav da nema realne veličine koja je rješenje polinoma, onda ima kompleksne veličine koja je rješenje.

Pod 1°. pokazuje se da u slučaju realnog rješenja, uvrštavanjem tog rješenja u polinom odmah slijedi dokaz da je to rješenje datog polinoma.

Pod 2°. dokazuje se (više pokazuje) slučaj kompleksnog rješenja. Promatra se sl.7.  $BAD$  je apscisa. Točka  $A$  je ishodište. Dio  $BA$  predstavlja pozitivne realne vrijednosti, a dio  $AD$  negativne realne vrijednosti. Na apscisi se nanose točke koje predstavljaju vrijednosti zadnjeg člana polinoma. Točka  $B$  predstavlja vrijednost na apscisi za  $-A$ , a točka  $D$  vrijednost na apscisi za  $g$ . Ordinata su predstavljene pripadne  $x$  vrijednosti polinoma, tj. rješenja tog polinoma. Tako je u točki  $B$  ordinata realnog  $x$  koja daje rješenje  $h$ , dok je,

tik prije točke  $C$  ordinata je neka posljednja moguća realna vrijednost  $x$  koja predstavlja rješenje. Iza točke  $C$  ordinata ( $x$ ) više ne može imati realnu vrijednost koja bi predstavljala rješenje i dalje slijede samo kompleksne vrijednosti ordinate koje su rješenja polinoma.

U ovom izlaganju vezanom za sl.7 je prisutna nejasnoća prikaza. Apscisa  $BAD$  podijeljena je na dva dijela  $BA$  i  $AD$  i nigdje nije eksplicitno navedeno da je točka  $A$  ishodište. No ako duljina  $BA$  predstavlja zadnji član polinoma  $-A$ , koji se neminovno kontinuirano smanjuje kretanjem po apscisi, onda će točka  $A$  biti nekakvo ishodište, jer će u jednom trenutku zadnji član iščeznuti. Isto tako u trenutku kad zadnji član polinoma iščezne mora i  $x$  ordinata navedene krivulje ili sjeći ili dodirivati apscisu. Je li to mjesto ishodište ili nije u konačnici nije presudno za navedeni dokaz, ali način na koji je izveden otežava praćenje dokaza. I druga nejasnoća je da u prvoj rečenici eksplicitno kaže da duljina  $AD$  predstavlja  $g$ , dok u zadnjoj rečenici na jednom mjestu (ukoliko to nije tiskarska pogreška) kaže da  $AC$  predstavlja  $g$ , a na drugom kaže da  $AD$  predstavlja  $g$ . Da  $AC$  predstavlja  $g$  je pak nelogično jer u točki  $C$  je posljednja vrijednost apscise (zadnjeg člana polinoma) pri kojem je  $x$  još realan. Dakle jedino  $AD$  može predstavljati  $g$  (iako točka  $D$  može biti po volji blizu točki  $C$ ).

Dosadašnjim dokazima pokazano je, prema autoru, da za bilo koje realno  $z$  navedena funkcija ima rješenje.

U člancima 5. i 6. pokazano je da teorem vrijedi za cijelu funkciju „globalno“, dok je u člancima 2. do 4. pokazivano da vrijedi „lokalno“.

uz članak VII.

Tvrđi se da se polinom može podijeliti kompleksnim rješenjem  $x - (p + q\sqrt{-1})$ . Na elegantan i jednostavan način se izvodi dokaz, koji ne treba dodatna objašnjenja.

uz članak VIII.

Tvrđi se da se polinom može podijeliti i kompleksnim rješenjem  $x - (p - q\sqrt{-1})$ . Također, na elegantan i jednostavan način se izvodi dokaz, koji ne treba dodatna objašnjenja.

uz članak IX.

Ako je polinom djeljiv sa izrazima oblika  $(x-a)$  i  $(x-b)$  (gdje su  $a$  i  $b$  rješenja polinoma), jasno je da će biti djeljiv i s produktom tih izraza. Ako su  $a$  i  $b$  konjugirano kompleksna rješenja polinoma također je jasno da će tada produkt navedena dva izraza sadržavati samo realne članove.

Literatura:

Recherches sur le calcul intégral, Jean le Rond d'Alembert, 1746.

D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra, Christopher Baltus, 2004.

Introductio in analysin infinitorum, Leonhard Euler, 1748.

Demonstratio nova theorematis omnem functionem..., Carl Friedrich Gauss, 1799.

RECHERCHES  
SUR LE CALCUL INTÉGRAL  
PAR MR. D'ALEMBERT.  
PREMIÈRE PARTIE  
DE L'INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONELLES.

Pour pouvoir reduire généralement á la quadrature de l'hyperbole ou á celle du cercle, une fraction rationnelle differentielle, suivant la methode de *M. Bernoulli*\* il faut démontrer que tout multinome rationnel & sans diviseur compose d'une variable  $x$  & de constantes, peut toujours se partager, lorsqu'il est d'un degré pair, en facteurs trinomes  $xx + fx + g$ ,  $xx + hx + i$ . &c. dont tous les coefficients  $f, g, h, i$ , &c. soient réels. Il est visible que cette difficulté ne tombe que sur les multinomes qui ne peuvent étre divisés par aucuns binomes réels,  $x+a, x+b$  &c. car on pourra toujours faire évanouir par la division tous les Binomes réels, lorsqu'il y en aura, & l'on voit aisément que les produits de ces binomes donneront des facteurs réels  $xx + fx + g$ .

*Mrs. Cottes, Moivre, Herman* &c. & plusieurs autres n'ont resolu la difficulté dont il s'agit que pour les multinomes  $x^{2m} + Ax^m + B$  composes de trois termes seulement. *M. Smith*

\*Voyez les mem. de l'Acad de Paris. an.1702.

dans le Commentaire qu'il a inferé á la fin de *l'Harmonia mensurarum*, la resolu aussi pour multinomes du 4<sup>e</sup> degré seulement, & il tire sa démonstration de ce que la réduite de ce multinome considéré comme une Equation du 4<sup>e</sup> degré, a son dernier terme negatif. Personne, que je sache n'a été plus loin, si on en excepte *Mr. Euler*, qui dans le Tom. VII. des *Miscellanea Berolinensia*, fait mention d'un ouvrage, ou il á démontré en general la proposition dont il est question. Mais in me semble que *M. Euler* n'a encore rien publié de son travail sur ce sujet. Du moins je n'en ay trouvé aucune trace dans les ouvrages de ce celebre auteur. J'ai donc cru pouvoir exposer ici en peu de mots mes recherches sur cette matière, d'autant plus qu'elles me sourniront l'occasion de demontrer chemin faisant plusieurs propositions, assez mal prouvées dans presque tous les livres d'algebre.

II. (Fig.1.2.3.) *Propos. 1. Soit TM une courbe quelconque dont les coordonnées TP = z, PM = y, & dans laquelle y = 0 ou y = ∞ lorsque z = 0. Si on prend z positive ou negative, mais infiniment petite, la valeur de y en z pourra toujours être exprimée par une quantité réelle, lorsque z sera positive: & lorsque z sera negative, par une quantite réelle, ou par une quantite  $p + q\sqrt{-1}$ , dans laquelle p & q seront l'un & l'autre réels.*

Car losque z est infiniment petite, on peut avoir la valeur de y en z par cette serie très convergente  $y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}} + \&c.$  dans laquelle les exposans de z sont imaginés aller en augmentant, & dont on peut toujours supposer que tous les termes sont réels en faisant z positive; car puisque la courbe passe par le point T ou qu'elle a une asymptote en ce point, (byp.), il s'ensuit qu'on peut

toujours supposer que les positives tombent du côté de P ou sont les ordonnées réelles. 1° Or si tous les termes de cette serie demeurent positifs en faisant  $z$  negative, la valeur de  $y$ , repondante à  $z$  positive ou negative, pourra etre exprimée simplement par  $y = az^{\frac{m}{n}}$ , en negligant tous les autres termes qui sont nuls par rapport auter, & en ce cas il repondra une valeur réelle de  $y$ , tant à  $z$  negative, ce qu'à  $z$  positive. 2°. Si  $z^{\frac{m}{n}}$  devient imaginaire en faisant  $z$  negative, ce qui arrivera si  $n$  est un nombre pair, &  $m$  un nombre impair, alors l'ordonnée correspondante à  $z$  negative ou positive pourra encore etre exprimée par  $az^{\frac{m}{n}}$  qui sera réelle, quand  $z$  sera positive, & qui se changera pour  $z$  negative en  $a^{2k}\sqrt{-z^m} = az^{\frac{m}{2k}} \cdot \sqrt[2k]{-1} = a\left(z^{\frac{m}{2}}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{k}}$ .

Or les Geometres savent\* que toute quantité

$\sqrt[h]{B\sqrt{-1}}$  peut toujours se réduire à la forme  $p + q\sqrt{-1}$ ,  $p$  &  $q$  etant réels. Donc l'ordonnée imaginaire répondante à  $z$  negative pourra etre exprimée dans ce cas par  $p + q\sqrt{-1}$ . 3°. Si quelques uns des termes de la serie demeurent réels en faisant  $z$  negative, & que les autres deviennent imaginaries, on prendra  $y = az^{\frac{m}{n}} + cz^{\frac{t}{u}}$ ,  $az^{\frac{m}{n}}$  representant tous les termes qui demeurent réels en faisant  $z$  negative, &  $cz^{\frac{t}{u}}$  ceux qui deviennent imaginaries. Or la valeur de  $cz^{\frac{t}{u}}$  lorsque  $z$  est negative peut etre supposée  $= e + f\sqrt{-1}$ , (n.2.preced.)

\*Voyez Part. 2. cydessus

$e$  &  $f$  étant réels. Donc lorsque  $z$  est négative, on a  $y = az^{\frac{m}{n}} + e + f\sqrt{-1}$ ,  
c.a.d.  $p + q\sqrt{-1}$ . Ce Q.F.D.

(Pour ne laisser aucun scrupule sur cette démonstration, nous remarquerons

1°. Que la valeur de  $y$  en  $z$ , lorsque  $z$  est infiniment petite, est une suite infiniment convergente, dont les termes commencent, au moins à une certaine distance du 1<sup>er</sup> terme, à ne contenir que des puissances positives de  $z$ , & sont par conséquent infiniment petits.

2°. Que si on substitue à la place de  $y$  sa valeur en  $z$  dans l'Equation de la courbe, plus la valeur substituée de  $y$  aura de termes, plus les puissances de  $z$  seront hautes dans les termes qui resteront après avoir effacé ceux qui se détruisent, & qu'ainsi le résultat de la substitution approchera d'autant plus d'être nul, qu'on prendra plus de termes pour la valeur de  $y$ . 3°. qu'il en sera de même si en faisant  $z$  négative dans l'Equation de la courbe, on y substitue la valeur de  $y$  répondante à  $z$  négative; car plus cette valeur substituée aura de termes, plus les puissances de  $z$  ou de  $-z$  seront hautes dans les termes restans après la substitution. Or si cherche une quantité

$A + B\sqrt{-1} = (-z)^{\frac{n}{2m}}$ , on trouvera facilement, & on prouvera cy-dessous après art.II. que  $A$  &  $B$  sont des quantités réelles de l'ordre de

$z^{\frac{n}{2m}}$ . Donc si on substitue dans ce termes restans, à la place des puissances de  $-z$ , leurs valeurs  $A + B\sqrt{-1}$ , & qu'on partage le résultat en deux quantités séparées, l'une toute réelle, l'autre multipliée par  $\sqrt{-1}$ , chacune de ces quantités sera d'autant plus petite, & approchera d'autant plus de zero, que l'on prendra plus de termes pour la valeur de  $y$ . Donc la serie infinie qui représente la valeur de  $y$  répondante à  $-z$ , en la vraie valeur de  $y$ , quoiqu'imaginaire;

*Memoires de l'Academie Tom.II.*

& il est visible que  $-z$  étant infiniment petite, non seulement on peut négliger tous les termes réels de la série excepté un seul, mais qu'on peut aussi en négliger tous les termes imaginaires

excepté un seul. Car soit  $(-z)^{\frac{n}{2m}} = A + B\sqrt{-1}$  &

$(-z)^{\frac{n+p}{2m}} = a + b\sqrt{-1}$ ,  $a$  sera infiniment petit par rapport à  $A$  &  $b$  par rapport à  $B$ . Donc &c.

Au reste il est très important d'observer à l'occasion de cette démonstration, que quand  $z$  est infiniment petite, il n'est pas toujours permis de supposer  $y =$  à une seule puissance de  $z$ , pour déterminer la figure de la courbe à son origine. Car soit par exemple la courbe dont l'Equation est  $y = z^2 + \sqrt{z^5}$ ; cette courbe doit avoir à son origine la forme représentée par la fig.3, c'est à dire qu'elle doit avoir deux branches convexes du même côté de son axe, sans aucunes autres branches réelles; au lieu que si on ne prenoit que  $y = z^2$  pour son Equation à l'origine on trouveroit qu'elle ressembleroit à parabole ordinaire. Il est même quelquefois nécessaire d'exprimer la valeur de  $y$  par 3 termes: par exemple soit  $y = b^z + z^2 + \sqrt{z^5}$ , la courbe aura à son origine la forme qui est représentée dans la fig. 5, au lieu que si on négligeoit le terme  $z^2$ , on trouveroit qu'elle auroit à son origine la forme représentée fig. 6.

III. (Fig.IV.) Cor. I. Si on rapporte la courbe aux coordonnées AC, CT, je dis que l'ordonnée imaginaire, répondante à une abscisse AQ, infiniment peu plus grande que AC, pourra être supposée  $= p + q\sqrt{-1}$ . Car en transportant l'axe TP en AC, on ne fait qu'augmenter de la quantité constante & réelle CT, toutes les ordonnées PM de la courbe, soit réelles, soit imaginaires. Or les

ordonnées imaginaires, qui répondent à TP negative & infin. petite, peuvent être supposées  $= p + q\sqrt{-1}$  (art.II.). Donc les ordonnées imaginaires répondantes à AQ sont  $= CT + p + q\sqrt{-1}$ .  
Donc &c.

IV. Cor.II. Donc si on augmente l'abscisse AC d'une quantité finie CQ, au moins jusqu'à un certain terme, l'ordonnée correspondante pourra être supposée  $= p + q\sqrt{-1}$ . Car s'il n'y avoit aucune valeur finie de CQ, telle que  $p + p\sqrt{-1}$  pût exprimer l'ordonnée correspondante, cette ordonnée ne pourroit pas non plus être exprimée par  $p + q\sqrt{-1}$ , CQ étant infiniment petite. Ce qui est contre le Cor. précédent. D'ailleurs il est visible par les observations qui terminent l'art.2, que la valeur de  $y$  en  $z$  étant infiniment convergente lorsque  $z$  est infiniment petite, on peut supposer à  $z$  une valeur finie, telle que la valeur correspondante de  $y$  soit aussi exprimée par une série très convergente; & si on imagine que cette série entière composée d'une infinité de termes soit substituée dans l'Equation de la courbe à la place de  $y$ , le résultat de la substitution sera infiniment petit ou zéro, soit dans le cas de  $z$  positive, soit dans le cas de  $z$  negative. Or dans le cas de  $z$  negative, la série qui exprime la valeur de  $y$  est composée de termes dont chacun est  $A + B\sqrt{-1}$ , A & B marquant des quantités réelles. Par conséquent la série entière peut être supposée  $= p + q\sqrt{-1}$ . Il y a donc une valeur finie de  $-z$ , à laquelle il répond une valeur de  $y$ , égale à  $p + q\sqrt{-1}$ .

V. Cor.III. Je dis maintenant que, quelle que soit la quantité finie CQ dont on augmente l'abscisse AC, l'ordonnée imaginaire correspondante pourra toujours être supposée égale à  $p + q\sqrt{-1}$ . Car supposons pour un moment qu'on ne puisse pas donner une

telle valeur á l'ordonnée, & que CO ou  $\alpha$  soit la plus grande valeur de CQ, qui donne l'ordonnée correspondante = á  $p + q\sqrt{-1}$ ,  
c. á. d. que  $\alpha$  ou CO soit la plus grande valeur de CQ qui donne  $p$  &  $q$  réels, il est evident (art.2.3.4.) qu'en augmentant  $\alpha$  d'une quantité infiniment petite, la valeur correspondante de  $p$  pourra etre supposée  $t + i\sqrt{-1}$ , & celle de  $q = b + \delta\sqrt{-1}$ ,  $t, i, b, \delta$ , etant réels. Car la valeur réelle de  $p$  & de  $q$  en  $\alpha$ , & en general la valeur de  $p$  & de  $q$  en CQ, est exprimée par deux Equations, qu'on peut supposer etre celles de deux courbes, qui ont CQ pour abscisse commune, & pour ordonnées  $p$  &  $q$ , (on aura ces Equations en substituant d'abord  $p + q\sqrt{-1}$  au lieu de  $y$  dans l'Equation de la courbe, & ensuite égalant separement á zero, la partie toute réelle de la transformée, & la partie dont les termes contiennent  $\sqrt{-1}$ .  
Aprés avoir divisé cette dernière par  $\sqrt{-1}$ , on aura deux Equations où les quantités CQ,  $p$ ,  $q$ , se trouveront melées, même si on veut avec leurs differences, ce qui arrivera lorsque la courbe TM ne sera pas Geometrique; & on pourra par les methodes connües, changer ces Equations en deux autres, donc l'une contienne CQ, &  $p$ , l'autre CQ, &  $q$ , & de plus leurs differences, si cela est necessaire.)  
Donc en augmentant  $\alpha$  d'une quantité infiniment petite, & par consequent aussi (art.4.) d'une quantité finie, l'ordonnée correspondante pourra etre supposée  $t + i\sqrt{-1} + (\beta + \delta\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ .  
=  $t - \delta + (i + \beta)\sqrt{-1}$ , c.à.d. qu'elle pourra etre representée par une quantité  $e + f\sqrt{-1}$  dans laquelle  $e$  &  $f$  soient réels.  
Donc  $\alpha$  n'est pas la plus petite valeur de CQ qui donne l'ordonnée correspondante = á  $p + q\sqrt{-1}$ ; ce qui est contre l'hypothese.  
Donc &c.

VI. *Propos. II. Soit un multinome quelconque*

$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx + g$ , tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de  $x$ , y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité  $p + q\sqrt{-1}$  à substituer à la place de  $x$ , & qui rendra ce multinome égal à zero.

Car 1°. On peut toujours changer le dernier terme  $g$ , sans toucher aux autres, en un terme tel, qu'il y aura une quantité réelle, à substituer à la place de  $x$  pour faire évanouir tous les termes: en effet substituons dans le multinome, à la place de  $x$ , une quantité réelle  $h$ , & soit  $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} + \dots + fh = A$ ,

il est évident que substituant  $b$  à la place de  $x$  dans

$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + fx - A$ , tout se détruira;

or ce multinome ne diffère du proposé que par son dernier terme.

(Fig. 7.) 2°. Soit tirée une droite BAD sur laquelle on prenne depuis le point A des parties AB & AD qui représentent les termes  $-A$  &  $g$ , & imaginons qu'au point B on élève perpendiculairement la ligne BO qui représente la quantité réelle  $h$ , & qu'à tous les points A, C, D, &c. on élève des lignes, réelles ou imaginaires, qui représentent les quantités réelles ou imaginaires dont la substitution à la place de  $x$  fait évanouir tous les termes du multinome, en donnant successivement à son dernier terme toutes les valeurs possibles depuis  $-AB$  ou  $-A$  jusqu'à  $AC$  ou  $g$ ; il est évident que les extrémités O, Q, T, &c. des ordonnées réelles seront à une courbe OQTS, & que l'ordonnée imaginaire répondante à AD pourra toujours être supposée  $= p + q\sqrt{-1}$ . (art. 5.) Donc &c.

Ce Q.F.D.

VII. Corrol.I. Donc le multinome proposé pourra être divisé par  $x - p - q\sqrt{-1}$ . Car en faisant la division il est toujours possible de parvenir à un reste  $r$  dans lequel il n'y ait plus de  $x$ ; & si on nomme  $Q$  le quotient, il est évident que  $(x - p - q\sqrt{-1}) \times Q + r$  sera égal & identique au multinome proposé. Donc substituant dans cette quantité  $p + q\sqrt{-1}$  au lieu de  $x$ , le resultat doit être  $= 0$ . Donc  $r = 0$ . Donc la division se sans reste.

VIII. Corrol.II. Le même multinome pourra aussi se diviser par  $x - p + q\sqrt{-1}$ . La difficulté se réduit à faire voir que si  $p + q\sqrt{-1}$  substitué à la place de  $x$  fait évanouir tous les termes du multinome, il en sera de même de  $p - q\sqrt{-1}$ . Pour le démontrer je remarque qu'en substituant  $p + q\sqrt{-1}$  au lieu de  $x$ , & faisant le résultat  $= 0$ , on a nécessairement deux Equations, dont l'une est formée des termes tout réels, & l'autre des termes imaginaires qui contiennent  $q\sqrt{-1}$ ; que dans la partie formée de termes tout réels, il n'y a que des puissances paires de  $q$ ; que dans la partie formée de termes imaginaires, il n'y a que des puissances impaires de  $q$ , & Que cette partie ou Equation contient  $q\sqrt{-1}$  à tous ses termes. Donc en la divisant par  $q\sqrt{-1}$ , elle ne contiendra plus que des puissances paires de  $q$  ainsi que l'autre. Donc chacune de ces Equations ne souffrira aucun changement, si on y substitue  $-q$  pour  $q$ . Donc si  $p + q\sqrt{-1}$  substitué à la place de  $x$  fait évanouir tous les termes du multinome, il en sera de même de  $p - q\sqrt{-1}$ .

IX. *Propos.III. Les mêmes choses étant supposées que dans l'art. 6. je-dis que le multinome pourra toujours se diviser en facteurs*

$xx + hx + i$ ,  $xx + lx + m$ , &c. dont les coefficients soient réels.

Carpuisque ce multinome peut se diviser par  $x - p - q\sqrt{-1}$  &  $x - p + q\sqrt{-1}$  (art. 7. & 8.) il pourra aussi diviser par  $xx - 2px + pp + qq$  qui est un facteur tout réel; & faisant sur le quotient qui en proviendra les mêmes raisonnemens qu'on a faits, art. 6. 7. 8, sur le multinome, on prouvera de même qu'il peut aussi diviser par un facteur trinome réel, & ainsi de suite. Donc &c. *Ce Q. f. D.*

#### REMARQUE I<sup>re</sup>.

X. Il est à remarquer que dans les demonstrations precedentes, on n'a point supposé que la racine imaginaire de multinome, eût ou pût avoir un expression imaginaire, avant de la reduire à  $p + q\sqrt{-1}$ ; & nos démonstrations n'en sont par là que plus generales. Mais on pourra toujours avoir les quantités réelles  $p$  &  $q$  au moins par une construction geometrique, puisque l'on a deux Equations qui renferment  $p$  &  $q$ .

D'ailleurs, sans s'embarasser si le multinome a des racines imaginaires, on peut se contenter de le diviser par  $xx + hx + i$ , & supposant le reste de la division egal à zero, on aura deux Equations en  $h$  & en  $i$ , qui auront toujours au moins plusieurs racines réelles.

#### REMARQUE II<sup>de</sup>.

XI. Si on a l'expression imaginaire quelconque de la racine du multinome, ou en general d'une quantité quelconque, on pourra toujours trouver une quantité  $p + q\sqrt{-1}$  à laquelle cette expression

soit égale, & assigner les quantités  $p$  &  $q$ , ou par la seule division des arcs de cercle en parties égales, ou par cette division & par les logarithmes & la quadrature de cercle, lorsqu'il se rencontrera dans l'expression donnée des exposans imaginaires. J'ai démontré cette propositions dans l'art 78 de ma dissertation sur les vents, à l'occasion d'un Probleme pour la solution duquel elle m'etoit necessaire;

j'y ai fait voir 1°. que  $\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$ , en prenant A & B réels,

ce qui est evident puisque  $\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + h\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1}) \times (g - h\sqrt{-1})}{(g + h\sqrt{-1}) \times (g - h\sqrt{-1})} =$

$$\frac{ag + bh}{aa + hh} + \frac{bg - ah}{aa + hh} \sqrt{-1}$$

2°. que  $(a + b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$  etoit  $= A + B\sqrt{-1}$ , en

prenant B & A pour les sinus & cosinus d'un angle dont le rayon

est  $\sqrt{(aa + bb)g} \times e^{-h \int \frac{adb - bda}{2(aa + bb)}}$  & dont la valeur est  $h$

$\text{Log} \sqrt{(aa + bb)} + g \int \frac{adb - bda}{aa + bb}$ ; où l'on remarquera que

$\int \frac{adb - bda}{aa + bb}$  est l'angle dont la tangente est  $\frac{b}{a}$ . 3°. Par ces

deux Propositions il est facile de réduire toute quantité imaginaire à  $A + B\sqrt{-1}$ , en faisant evanouir successivement toutes les expressions imaginaires qu'elle renfermera, excepté une seule; qui doit même s' evanouir si l'expression proposée, qui renferme des imaginaires, marque cependant une quantité réelle, comme dans le cas irreductible du 3°. degré.